

El *teorema de incompletitud de Gödel* es uno de los resultados más profundos y paradójicos de la lógica matemática. Es también, quizá, el teorema que ha ejercido más fascinación en ámbitos alejados de las ciencias exactas. Autores como Lacan, Deleuze, y otros han invocado a Gödel en arriesgadas analogías. Junto con otras palabras mágicas de la escena posmoderna como “caos”, “indeterminación”, “aleatoriedad”, el fenómeno de incompletitud se ha asociado también a supuestas derrotas de la razón y al fin de la certidumbre en el terreno más exclusivo del pensamiento: el reino de las fórmulas exactas.

Pero qué dice (y qué no dice) el teorema de Gödel

El teorema de Gödel trata de la distancia, y la diferencia, entre la verdad en matemática y la parte de verdad que puede demostrarse a partir de axiomas, en esos textos con fórmulas y pasos lógicos encadenados que los matemáticos llaman *demostración*. En otras disciplinas es claro que lo verdadero no necesariamente coincide con lo demostrable. Basta pensar en un crimen en un cuarto cerrado con dos únicos sospechosos junto al cadáver. Cada uno de estos dos sospechosos sabe toda la verdad sobre el crimen, que puede resumirse en la frase: “Yo fui” o “Yo no fui”. Sin embargo, si el juez no dispone de la confesión directa del culpable, debe intentar un camino indirecto: recolección de evidencias materiales; verificación de horarios y coartadas; etcétera.



La cuestión de lo demostrable empieza cuando los dos dicen “Yo no fui”.

Muchas veces este camino indirecto no alcanza a demostrar, de acuerdo con los estrictos requisitos legales, ni la culpabilidad de uno ni la inocencia del otro. En todas las disciplinas hay una distancia entre la verdad y lo demostrable. Sin embargo, los matemáticos siempre pensaron -por lo menos hasta el siglo XIX- que los mundos de lo verdadero y lo demostrable eran identificables, y que cualquiera fuera la verdad que pudieran observar en el cielo platónico de los objetos matemáticos (cierto orden, conexiones, patrón de regularidad), esa verdad podría reobtenerse “por escrito” mediante el método axiomático, como tesis de una demostración.

A principios del siglo XX hubo una crisis en los fundamentos de la matemática a partir de una paradoja que descubrió Bertrand Russell en la teoría de conjuntos. Russell y David Hilbert, cada uno por su lado, se propusieron la tarea de reconstruir todo el edificio de la matemática a partir de axiomas indudables, y de una teoría de la demostración “segura” que permitiera chequear y regenerar todas las pruebas matemáticas sin necesidad de recurrir a la inteligencia, sino por métodos puramente mecánicos. El programa formalista de Hilbert tenía el objetivo de refundar la matemática a partir de la teoría más elemental (y más probada en la historia): la *aritmética*, esto es, los números que usamos para contar, con las operaciones habituales de suma y multiplicación, tal como se aprenden en la escuela primaria. Hilbert se proponía postular axiomas que permitieran obtener, vía demostraciones “seguras”, todos los enunciados verdaderos de la aritmética. La coronación de su programa sería dar una prueba también “segura” de consistencia para la aritmética, que alejara para siempre la posibilidad de volver a encontrar las temidas paradojas y contradicciones. Hasta 1930 estaba trabajando en esta última demostración. Pero en 1931, el teorema de Gödel dio por tierra con sus esperanzas:

Gödel probó que *cualquiera fuera el sistema de axiomas que se propusiera para la aritmética, si ese sistema era consistente (es decir, si no llevaba a contradicciones) había enunciados verdaderos que no podían ser demostrados por el sistema*.

Así, el teorema de Gödel replica la situación del crimen con dos sospechosos: para cada sistema axiomático propuesto para la aritmética, hay enunciados que, por la exigencia del protocolo fijado, el sistema no puede ni probar ni refutar.

El teorema de Gödel destruyó una por una todas las esperanzas de Hilbert: en primer lugar, mostró la imposibilidad de fundar toda la aritmética sobre axiomas. Aún peor, uno de los enunciados no demostrables exhibidos por Gödel fue, justamente, la propiedad de consistencia, lo que liquida también el plan de Hilbert de dar una fundamentación última y absoluta para la matemática a partir de la aritmética. Como una última ironía, la demostración dada por Gödel para su teorema sí es perfectamente “segura” y cumple todos los requisitos formales.

Por qué el teorema de Gödel interesó (y debe interesar) fuera de la matemática

La forma en que se expresa el conocimiento en diversos campos tiene algo del mecanismo de los sistemas axiomáticos: unos pocos principios “duros” y firmemente asentados, y un devanado de argumentos que justifican todas las demás afirmaciones en base a esos primeros postulados. Aún en escuelas de pensamiento contrapuestas, una vez fijados y determinados estos primeros principios, muchas veces antagónicos, hay un modo de razonar y justificar -un protocolo lógico- que hasta cierto punto se comparte. De manera que no es extraño entonces que la clase de limitación para los sistemas formales que marca el teorema de Gödel haya hecho reflexionar a otros pensadores sobre los fundamentos de sus propias disciplinas. Sin embargo, muchas veces las extrapolaciones apresuradas y las analogías demasiado ligeras han llevado a conclusiones tremendistas, erróneas, a veces incluso risibles.

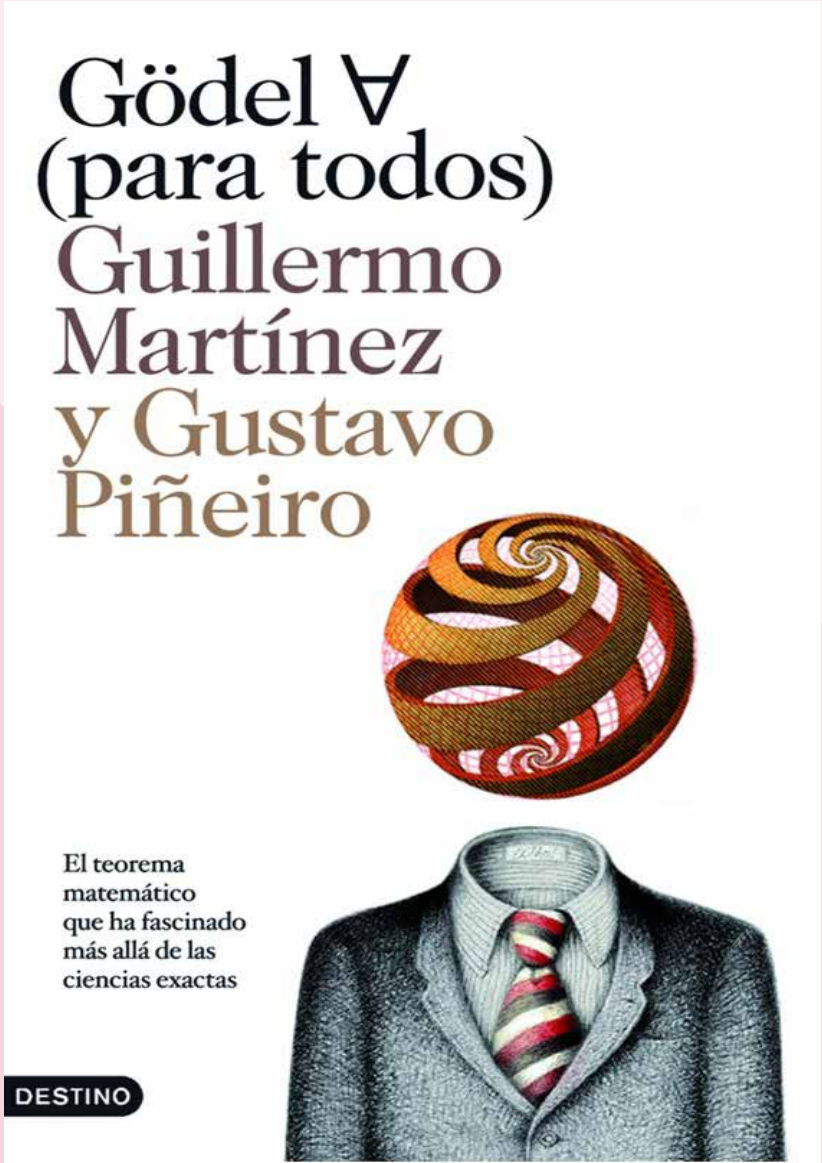
Sobre el “por qué” y el “cómo”

Durante varios años trabajamos con Gustavo Piñeiro para comprender qué hecho matemático da origen al fenómeno de incompletitud. Finalmente identificamos un principio elemental que pone en marcha toda la demostración de Gödel y explica por qué la aritmética es incompleta (ver recuadro). A partir de ese hallazgo escribimos Gödel para todos (Destino, 2010), buscando acercar una de las mayores hazañas intelectuales del siglo XX a lectores no especializados.

El único hecho matemático

En el lenguaje las letras y las expresiones se concatenan unas a continuación de las otras para formar palabras. Así, por ejemplo, la expresión “ab” concatenada con la expresión “ad” nos da la palabra “abad”. La clave en la demostración del teorema de Gödel es “traducir” el lenguaje en términos matemáticos para “hacerlo hablar” de sí mismo. Las letras del lenguaje se representan por medio de números. Y esta operación de concatenar expresiones se representa por medio de la concatenación de números. Si a la “a” le corresponde el número 1, a la “b” el número 2, y a la “d” el número 4, concatenar “ab” con “ad” equivaldrá, en términos numéricos, a concatenar el número 12 con el número 14. Esta concatenación de números no es más, otra vez, que escribir el segundo número a continuación del primero, y da el número 1214. Pero la concatenación de números, tal como se aprende en el colegio primario, puede obtenerse a partir de la multiplicación y la suma. En efecto, concatenar 12 con 14 equivale a *multiplicar* 12 x 100 (para “correr” dos lugares) y *sumar* luego 14.

El único hecho matemático detrás del teorema de Gödel es éste: la *concatenación de números puede obtenerse con la suma y la multiplicación*.



Gödel para todos. Buenos Aires, Editorial Destino, 2010



GUILLERMO MARTÍNEZ

(Bahía Blanca, 1962) Lic. en matemática. Dr. en lógica. Autor de cuentos, ensayos y novelas, algunas publicadas en varios idiomas y llevadas al cine: La Ira de Dios, Acerca de Roderer; Crímenes imperceptibles. Obtuvo premios: del Fondo Nacional de las Artes; Planeta 2003; hispanoamericano de cuento Gabriel García Márquez; Milovan Vidakovic (Serbia). Es uno de los escritores argentinos más traducidos. Su última novela es Un crimen dialéctico (2026).